

# Sur les formes quadratique

**Omara Samira**

22 juin 2018

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Formes bilinéaires et bilinéaires symétriques</b>	<b>2</b>
1.1 Propriétés d'une forme bilinéaire symétrique . . . . .	3
1.2 Rang d'une forme bilinéaire symétrique . . . . .	5
1.3 Forme bilinéaire symétrique et dualité . . . . .	6
<b>2 Formes quadratiques</b>	<b>7</b>
2.1 Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique associée . . . . .	7
2.2 Espace quadratique . . . . .	9
2.3 Méthode de Gauss pour la décomposition en carrés . . . . .	9
2.4 Décomposition d'une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ . . . . .	13
2.4.1 Cas d'une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ . . . . .	13
2.4.2 Cas d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ . . . . .	14
2.5 Signature d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ . . . . .	14
2.6 Classes d'équivalence de formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ . . . . .	15
2.7 Classes d'équivalence de formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ . . . . .	15
2.8 Orthogonalité . . . . .	15
2.9 Espaces quadratiques réguliers . . . . .	17
2.10 Plan hyperbolique . . . . .	20
<b>3 Formes quadratiques sur un corps quelconque</b>	<b>23</b>
3.1 Formes quadratiques sur $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	23
3.1.1 Questions sur l'isotropie des formes quadratiques . . . . .	25
3.2 Formes équivalentes . . . . .	25
3.2.1 Questions de classifications . . . . .	26
3.3 Diagonalisation . . . . .	30
3.3.1 Théorème de Witt . . . . .	32
3.4 Produit tensoriel . . . . .	35
3.4.1 Le produit tensoriel de formes quadratiques . . . . .	38
3.4.2 Anneaux de Witt . . . . .	39
3.5 Formes de Pfister et sommes de carrés . . . . .	44
3.5.1 Niveau d'un corps . . . . .	48
<b>Conclusion</b>	<b>49</b>



# Introduction

L'étude élémentaire des produits scalaires, des espaces euclidiens, des transformations orthogonale va être poursuivie dans ce mémoire et élargie à des espaces munis de formes bilinéaires symétriques qui ne sont plus nécessairement des produits scalaires.

Nous présentons des théorèmes de structure donnant des expressions normalisées pour les formes bilinéaires symétriques par rapport à des bases appropriées.

Une des idées importantes de Witt était de considérer les formes quadratiques ensemble, plutôt qu'individuellement. Ceci l'a conduit à définir ce qu'on appelle aujourd'hui l'anneau de Witt.

Ce mémoire se divise en trois chapitres :

Dans le premier, nous donnerons quelques résultats généraux sur les formes bilinéaires symétriques.

Dans le second, nous traitons la classification des formes quadratiques sur les corps  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

Dans le troisième chapitre, on donne la classification des formes quadratiques sur un corps  $\mathbb{F}_q$ .

# Chapitre 1

## Formes bilinéaires et bilinéaires symétriques

il existe trois types majeurs de forme bilinéaires : symétrique (ou hermitienne), unitaire et alternnée (antisymétrique). La démarche classique consistant à décomposer un objet en somme directe d'objets plus simples, dans la mesure du possible.

Le premier chapitre est constitué des rappelles et des concepts de base, nous rappelons quelques définitions sur les formes bilinéaires symétriques.

### Définition 1.1

Soient  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Une forme bilinéaire sur  $E$  est une fonction  $\varphi : E \times E \rightarrow K$  vérifiant la propriété dite de bilinéarité :

▷ pour tous  $u, u', v, v'$  de  $E$  et tout  $\lambda$  de  $K$  :

$$\begin{aligned}\varphi(u + u', v) &= \varphi(u, v) + \varphi(u', v) \\ \varphi(u, v + v') &= \varphi(u, v) + \varphi(u, v') \\ \varphi(\lambda u, v) &= \lambda \varphi(u, v) = \varphi(u, \lambda v)\end{aligned}$$

La forme bilinéaire  $\varphi$  est dite symétrique si elle vérifie la propriété de symétrie

▷ pour tous  $u, v$  de  $E$  :

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u).$$

### Exemples 1.1

- 1) Tous les produits scalaires sont des formes bilinéaires symétriques
- 2) Sur  $K^n$ , on peut définir les formes bilinéaires symétriques

$$(u, v) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq r} a_i x_i y_i$$

avec  $r \leq n$ ,  $u = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $v = (y_1, \dots, y_n)$  et les  $a_i$  dans  $K$ .

## 1.1 Propriétés d'une forme bilinéaire symétrique

Soient  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel,  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ . Les propriétés de  $\varphi$  impliquent les formules :

$$\begin{aligned}\varphi(u + v, u + v) &= \varphi(u, u) + 2\varphi(u, v) + \varphi(v, v) \\ \varphi(u - v, u - v) &= \varphi(u, u) - 2\varphi(u, v) + \varphi(v, v) \\ \varphi(u, v) &= \frac{1}{2}(\varphi(u + v, u + v) - \varphi(u, u) - \varphi(v, v)) \\ \varphi(u, v) &= \frac{1}{4}(\varphi(u + v, u + v) - \varphi(u - v, u - v)).\end{aligned}$$

### Expression d' une forme bilinéaire dans une base

Soient  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $\varphi : E \times E \rightarrow K$  une forme bilinéaire sur  $E$ . Si  $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  et  $v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$  sont deux vecteurs de  $E$ , la bilinéarité de  $\varphi$  donne :

$$\varphi(u, v) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

La forme  $\varphi$  est donc entièrement déterminée par les  $n^2$  valeurs  $\varphi(e_i, e_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Si  $\varphi$  est symétrique, elle est déterminée par les  $n(n+1)/2$  valeurs  $\varphi(e_i, e_j)$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ , puisque  $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i)$  pour  $i > j$  et on a :

$$\varphi(u, v) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i \varphi(e_i, e_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

## Matrice d'une forme bilinéaire dans une base

Avec les mêmes notations, la donnée de  $\varphi$  définit la matrice carrée d'ordre  $n$  :  $A = (a_{ij}) = (\varphi(e_i, e_j))$  dite matrice associée à la forme bilinéaire  $\varphi$  dans la base  $B$ . Si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs de  $E$  et si  $U$  et  $V$  sont les matrices colonnes des coordonnées de  $u$  et de  $v$  dans la base  $B$ , on vérifie que

$$\varphi(u, v) = {}^t U A V$$

en identifiant  $\varphi(u, v)$  à la matrice  ${}^t U A V$  qui n'a qu'une seule ligne et une seule colonne. Si la forme bilinéaire est symétrique, la matrice  $A$  est symétrique et on a

$$\varphi(u, v) = {}^t U A V = {}^t V A U = \varphi(v, u).$$

Inversement, la base  $B$  étant fixée, toute matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  définit une forme bilinéaire  $\varphi$  sur  $E$  dont la matrice dans la base  $B$  est  $A$  : il suffit de poser  $\varphi(u, v) = {}^t U A V$  ; la forme bilinéaire est symétrique si et seulement si  $A$  est symétrique.

### Changement de base

La valeur de  $\varphi(u, v)$  ne change pas quand on change de base pour exprimer  $u$  et  $v$ . Avec les mêmes notations que précédemment, soient  $B'$  une autre base de  $E$ ,  $P = M(id, B', B)$  la matrice de passage. Si on note  $U'$  et  $V'$  les matrices colonnes des coordonnées de  $u$  et  $v$  dans la base  $B'$  on a  $U = P U'$ ,  $V = P V'$  d'où  $\varphi(u, v) = {}^t U A V = {}^t (P U') A P V' = {}^t U' ({}^t P A P) V'$ . Ainsi, la matrice associée à  $\varphi$  dans la base  $B'$  est :

$$A' = \mathcal{M}_{B'}(\varphi) = {}^t P A P.$$

### Définition 1.2 (Matrice congruence)

Soient  $A$  et  $A'$  deux matrices (symétriques) de  $M_n(k)$ . On dit que  $A$  et  $A'$  sont congruences s'il existe  $P \in GL_n(k)$  telle que  $A' = P^t A P$ .

### Proposition 1.1

On a une bijection entre les classes d'isomorphisme de formes bilinéaires symétriques et les classes de congruence de matrices symétriques.

## 1.2 Rang d'une forme bilinéaire symétrique

Les matrices  $A$  et  $A' = {}^tPAP$  associées à  $\varphi$  dans les bases  $B$  et  $B'$  ont même rang puisque  $P$  est inversible. Par conséquent, le rang de la matrice associée à une forme bilinéaire symétrique ne change pas quand on change de base. On définit le rang d'une forme bilinéaire symétrique comme le rang de la matrice associée à  $\varphi$  dans une base quelconque de  $E$ . On peut également remarquer que le déterminant de la matrice associée à  $\varphi$  change d'un carré de  $K$  suivant la base, puisque  $\det({}^tPAP) = (\det(P))^2 \det(A)$ .

**Exemple 1.2** (plan hyperbolique)

Plaçons-nous dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la base canonique  $B = (e_1, e_2)$ . La forme bilinéaire symétrique  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(e_1, e_1) = \varphi(e_2, e_2) = 0$ ,  $\varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_2, e_1) = 1$ , a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans  $B$ . Si  $u = (x_1, x_2)$ , on a  $\varphi(u, u) = 2x_1x_2$  et si  $v = (y_1, y_2)$ , on a  $\varphi(u, v) = x_1y_2 + x_2y_1$ . Considérons la base  $B' = (e'_1, e'_2)$ , définie par

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_2/2 \end{cases}$$

La formule précédente donne la matrice  $A'$  de  $\varphi$  dans la base  $B'$  :

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on note avec des ' les coordonnées de  $u$  et  $v$  dans la base  $B'$ , il est plus facile ici de substituer  $x_1 = x'_1$ ,  $x_2 = x'_2/2$ , etc. Dans les formules donnant  $\varphi$  pour obtenir directement  $\varphi(u, u) = x'_1x'_2$ ,  $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(x'_1y'_2 + x'_2y'_1)$ .

L'expression de  $\varphi$  dans la base  $B'' = (e''_1, e''_2)$  définie par

$$\begin{cases} e''_1 &= e'_1 + e'_2 \\ e''_2 &= e'_1 - e'_2 \end{cases}$$

est donnée par la matrice :

$$A'' = {}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

soit  $\varphi(u, u) = x_1''^2 - x_2''^2$ ,  $\varphi(u, v) = x_1''y_1'' - x_2''y_2''$ , en notant avec des '' les coordonnées de  $u, v$  dans la base  $B''$ . On peut simplement obtenir ces expressions en substituant  $x_1' = x_1'' + x_2''$ ,  $x_2' = x_1'' - x_2''$ , etc. Dans les formules précédentes. Cet exemple est à la base de la notion de plan hyperbolique.

### 1.3 Forme bilinéaire symétrique et dualité

Soient  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  muni d'une base  $B = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  de matrice  $A = (a_{ij})$  par rapport à  $B$ . On définit une application linéaire  $\Psi : E \rightarrow E^*$  en associant à tout  $u \in E$ , la forme linéaire  $\Psi(u) : v \mapsto \varphi(u, v)$  (les vérifications de linéarité sont faciles).

Si on munit  $E^*$  de la base duale  $B^*$  de  $B$ , on a :  $M(\Psi, B, B^*) = A$ .

En effet, d'une part, pour  $i, j = 1, \dots, n$ , on a  $\Psi(e_j)(e_i) = \varphi(e_j, e_i) = a_{ij}$ ; d'autre part, si on écrit  $\Psi(e_j) = \sum_{1 \leq k \leq n} S_{kj} e_k^*$ , on a  $a_{ij} = \Psi(e_j)(e_i) = \sum_{1 \leq k \leq n} S_{kj} e_k^*(e_i) = S_{ij}$ .

La correspondance entre  $\varphi$  et  $\Psi$  est donc bijective. Le rang de la forme  $\varphi$  est égal au rang de l'application linéaire  $\Psi$ .

# Chapitre 2

## Formes quadratiques

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de forme bilinéaire symétrique et forme quadratique. C'est cette notion qui nous permettra d'établir des résultats de classification sur les formes quadratiques.

Dans tout ce qui suit, les corps considérés seront toujours de caractéristique différente de 2.

### 2.1 Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique associée

Soient  $K$  un corps (avec  $\text{car}(K) \neq 2$ ) et  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. À une forme bilinéaire symétrique  $\varphi : E \times E \rightarrow K$ , on associe l'application  $q : E \rightarrow K$  appelée forme quadratique sur  $E$ , définie par  $q(u) = \varphi(u, u)$ . Une forme quadratique se définit donc comme associée à une forme bilinéaire symétrique. Nous verrons comment définir une forme quadratique par un polynôme homogène de degré 2. On peut retrouver  $\varphi$  à partir de  $q$  avec les formules :

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)); \\ \varphi(u, v) &= \frac{1}{4}(q(u + v) - q(u - v)).\end{aligned}$$

Il est donc équivalent de se donner une forme quadratique ou une forme bilinéaire symétrique sur un espace. La forme bilinéaire symétrique associée à une forme qua-

dratique par l'une des formules précédentes est appelée forme polaire associée à la forme quadratique. Certains auteurs notent avec la même lettre une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée, écrivant, par exemple,  $q(u)$  et  $q(u, v)$ , le nombre d'arguments permettant seul de décider ce qui est exactement désigné par  $q$ .

## Expression d'une forme quadratique dans une base

Soient  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $\varphi : E \times E \rightarrow K$  une forme bilinéaire symétrique de forme quadratique associée  $q$ . Si, pour  $u = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i$ ,  $v = \sum_{1 \leq j \leq n} y_j e_j$ , on a  $\varphi(u, v) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i y_j$ , alors :

$$q(u) = \varphi(u, u) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Par exemple, la forme bilinéaire de l'exemple de 1.2, définie sur  $\mathbb{R}^2$  muni de la base canonique  $B = (e_1, e_2)$  par  $\varphi(u, v) = x_1 y_2 + x_2 y_1$  donne la forme quadratique définie par  $q(u) = 2x_1 x_2$ .

Soit  $A = (a_{ij})$  la matrice associée à  $\varphi$  dans la base  $B$ ; pour tout vecteur  $u$  de  $E$  de matrice colonne  $U$  dans la base  $B$ , on a :  $q(u) = {}^t U A U$ . La matrice  $A$  est appelée matrice associée à la forme quadratique  $q$  dans la base  $B$ .

## Formes quadratiques et polynômes homogènes de degré 2

Les formules précédentes montrent que  $q$  est une fonction polynomiale homogène de degré 2 en les coordonnées par rapport à la base  $B$  et on a la propriété d'homogénéité pour tout  $\alpha \in K$  et tout  $u \in E$  :  $q(\alpha u) = \alpha^2 q(u)$ ; en particulier,  $q(-u) = q(u)$ .

Réciproquement, si  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps  $K$  muni d'une base  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et si  $q : u = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$  est une fonction polynomiale homogène de degré 2 en les coordonnées par rapport à la base  $B$ ,  $q$  est l'expression dans  $B$  de la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique définie par  $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ , pour  $1 \leq i < j \leq n$ , et, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $\varphi(e_i, e_i) = a_{ii}$ . On peut donc définir une forme quadratique indépendamment d'une forme bilinéaire symétrique et appeler forme quadratique une fonction polynomiale homogène de degré 2 en  $n$  variables.

## Écriture matricielle, changement de base

La formule de changement de base est la même que pour les formes bilinéaires

symétriques ; si  $B'$  est une seconde base de  $E$  et si  $P = M(id, B', B)$ , on a :

$$q(u) = {}^t UAU = {}^t (PU')APU = {}^t U'({}^t PAP)U',$$

et la matrice associée à  $q$  dans la base  $B'$  est  ${}^t PAP$ . En reprenant le même exemple qu'en 1.2, la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $2x_1x_2$  dans la base  $B$ , a pour expressions  $x'_1x'_2$  dans la base  $B'$  et  $x''_1{}^2 - x''_2{}^2$  dans la base  $B''$ .

## Rang d'une forme quadratique

Le rang d'une forme quadratique est le rang de la forme polaire associée, c'est-à-dire le rang de n'importe quelle matrice associée à  $q$ .

En particulier, si  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i^2$ , la matrice de  $q$  est diagonale et le rang de  $q$  est le nombre de coefficients  $a_i$  non nuls.

## 2.2 Espace quadratique

Soit  $K$  un corps. Un couple  $(E, q)$  formé d'un  $K$ -espace vectoriel et d'une forme quadratique sur  $E$  est appelé  $K$ -espace quadratique et nous oublierons en général le  $K$ . On utilise le même mot pour désigner un couple  $(E, \varphi)$  formé d'un  $K$ -espace vectoriel et d'une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , ce qui ne présente aucun inconvénient puisqu'il est équivalent de se donner une forme quadratique ou une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  (on a supposé la caractéristique de  $K$  différente de 2).

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , la restriction  $q|_F$  de la forme quadratique  $q$  à  $F$  (ou de la forme  $\varphi$  à  $F \times F$ ) définit un espace quadratique  $(F, q|_F)$ .

## 2.3 Méthode de Gauss pour la décomposition en carrés

Soit  $q$  une forme quadratique sur un corps  $K$ . Nous allons présenter une méthode, due à Gauss, permettant de trouver une base dans laquelle la matrice de  $q$  soit diagonale, donc dans laquelle l'expression de  $q$  soit de la forme  $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i^2$ .

### Proposition 2.1

Soit  $K$  un corps (on suppose toujours  $\text{car}(K) \neq 2$ ). Pour tout entier  $n \geq 0$  et toute forme quadratique  $q$  sur  $K^n$  :  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$  il existe des éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $K$  et des formes linéaires linéairement indépendantes sur  $K$  :  $l_1, \dots, l_n$  telles que :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k (l_k(x_1, \dots, x_n))^2.$$

Les vecteurs de la base  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ , définie par le changement de variables  $x'_k = l_k(x_1, \dots, x_n)$  pour  $1 \leq k \leq n$ , sont orthogonaux entre eux deux à deux pour  $q$  et, si  $u = \sum_{1 \leq i \leq n} x'_i e'_i$ , alors  $q(u) = q(x'_1, \dots, x'_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k x'^2_k$ .

**Preuve.**

On raisonne par récurrence. Pour  $n = 0$  ou  $n = 1$ , le résultat est vrai. Soit  $n \geq 2$  un entier et soit  $q$  une forme quadratique sur  $K^n$  définie par un polynôme homogène  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ . Plusieurs cas peuvent se présenter :

1) Il existe  $i$  tel que  $a_{ii} \neq 0$ , disons  $a_{11} \neq 0$ . On considère les termes de  $q(x_1, \dots, x_n)$  où apparaît  $x_1$  :  $a_{11}x_1^2 + \sum_{2 \leq i \leq n} a_{1i}x_1x_i$ . C'est le début du développement du carré :  $a_{11}(x_1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}}x_i)^2 = a_{11}(l_1(x_1, \dots, x_n))^2$  où  $l_1(x_1, \dots, x_n)$  est une forme linéaire dont le terme en  $x_1$  est non nul (ça nous rappelle la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré au lycée). En regroupant les termes en  $x_2, \dots, x_n$ , on obtient :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{11}(l_1(x_1, \dots, x_n))^2 + q'(x_2, \dots, x_n)$$

et  $q'$  est une forme quadratique sur  $K^{n-1}$  à laquelle on peut appliquer l'hypothèse

de récurrence :  $q'(x_2, \dots, x_n) = \sum_{2 \leq k \leq n} \alpha_k (l_k(x_2, \dots, x_n))^2$ ; les formes linéaires  $l_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  sont définissables sur  $K^n$  et linéairement indépendantes sur  $K$ .

2) Il n'existe pas d'entier  $i$  tel que  $a_{ii} \neq 0$ , mais  $q$  n'est pas nulle ; l'un des coefficients  $a_{ij}$ ,  $i \neq j$ , n'est pas nul, par exemple,  $a_{12} \neq 0$ . On considère les termes de  $q(x_1, \dots, x_n)$  où apparaissent  $x_1$  ou  $x_2$  :  $a_{12}x_1x_2 + \sum_{3 \leq i \leq n} a_{1i}x_1x_i + \sum_{3 \leq i \leq n} a_{2i}x_2x_i$ . Cette somme est de la forme  $a_{12}x_1x_2 + Bx_1 + Cx_2$  (avec  $B$  et  $C$  formes linéaires), début du développement

de  $a_{12}(x_1 + \frac{C}{a_{12}})(x_2 + \frac{B}{a_{12}})$ . En regroupant les termes en  $x_3, \dots, x_n$ , on obtient :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{12}(x_1 + \frac{C}{a_{12}})(x_2 + \frac{B}{a_{12}}) + q'(x_3, \dots, x_n)$$

où  $q'$  est une forme quadratique sur  $K^{n-2}$  à laquelle on peut appliquer

l'hypothèse de récurrence :  $q'(x_3, \dots, x_n) = \sum_{3 \leq k \leq n} \alpha_k (l_k(x_3, \dots, x_n))^2$ . On transforme le premier produit à l'aide de la formule  $xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= \frac{a_{12}}{4}(x_1 + x_2 + l'_1(x_3, \dots, x_n))^2 - \frac{a_{12}}{4}(x_1 - x_2 + l'_2(x_3, \dots, x_n))^2 \\ &\quad + \sum_{3 \leq k \leq n} \alpha_k (l_k(x_3, \dots, x_n))^2. \end{aligned}$$

En posant :  $l_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + l'_1(x_3, \dots, x_n)$   $l_2(x_1, \dots, x_n) = x_1 - x_2 + l'_2(x_3, \dots, x_n)$ , on vérifie que les formes linéaires  $l_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  sont définissables sur  $K^n$  et linéairement indépendantes sur  $K$ .

3) **Changement de base.** Comme les formes linéaires  $l_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  sont

indépendantes, elles définissent un changement de base. Les nouvelles coordonnées sont définies en fonction des anciennes par  $x'_k = l_k(x_1, \dots, x_n)$  pour  $1 \leq k \leq n$ . On peut écrire ces équations  $X' = QX$  où  $Q$  est la matrice de passage de  $id : (K^n, B) \rightarrow (K^n, B')$ , soit  $Q = M(id, B, B')$ . Si on note  $D$  la matrice dont la

diagonale a pour coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , on a  ${}^tQDQ = A$ . Les vecteurs de  $B'$  sont les colonnes de la matrice  $P = Q^{-1} = M(id, B', B)$  et on a  ${}^tPAP = D$ .

4) La matrice de  $q$  dans la base  $B'$  étant diagonale, les vecteurs de  $B'$  sont  $q$ -orthogonaux deux à deux et l'expression de  $q$  dans la base  $B'$  est  $q(x'_1, \dots, x'_n) =$

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k x'^2_k. \blacksquare$$

### Exemple 2.1

Considérons la forme quadratique

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 4xz + 16yz + 4yt + 8zt$$

définie sur  $\mathbb{R}^4$  dont l'écriture matricielle dans la base canonique est  ${}^tUAU$  où  $U$  est la matrice colonne définie par  $u = (x, y, z, t)$  et où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_B(q)$$

On applique le 1) en choisissant la variable  $x$ , ce qui conduit à considérer tous les termes où apparaît  $x$  :  $x^2 + 6xy + 4xz$  et à introduire la forme linéaire donnée par  $x + 3y + 2z$ . On obtient  $q(x, y, z, t) = (x + 3y + 2z)^2 + 4yz + 4yt + 8zt$ .

On applique alors le 2) à  $4yz + 4yt + 8zt$  en choisissant le terme en  $yz$  :  $4yz + 4yt + 8zt = 4(y + 2t)(z + t) - 8t^2$ . Finalement,

$$q(x, y, z, t) = (x + 3y + 2z)^2 + (y + z + 3t)^2 - (y - z + t)^2 - 8t^2.$$

Les quatre formes linéaires sont

$$\begin{aligned} l_1 & : (x, y, z, t) \mapsto x + 3y + 2z, \quad l_2 : (x, y, z, t) \mapsto y + z + 3t, \\ l_3 & : (x, y, z, t) \mapsto y - z + t, \quad l_4 : (x, y, z, t) \mapsto t. \end{aligned}$$

Elles sont linéairement indépendantes sur  $K$ . Le changement de variable est défini par  $U' = QU$  avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et  ${}^tQAQ = D$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

On calcule alors (le mieux est sans doute ici de résoudre un système linéaire)

$$P = Q^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et on obtient  ${}^tPAP = D$ .

## 2.4 Décomposition d'une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

Soient  $n$  un entier et  $q$  une forme quadratique sur " $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$ ". On vient de voir que  $q$  peut s'écrire dans une base  $B = (e_1, \dots, e_n)$  convenable sous la forme  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^2$ . Si le rang de  $q$  est  $r$ , on peut supposer  $a_1, \dots, a_r$  non nuls et on a :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k \leq r} a_k x_k^2.$$

### 2.4.1 Cas d'une forme quadratique sur $\mathbb{C}$

Dans le cas où le corps de base est  $\mathbb{C}$ , comme tout nombre complexe est un carré, il existe pour  $k = 1, \dots, r$ ,  $b_k$  tel que  $b_k^2 = a_k$ . Dans la base définie par  $e'_k = e_k/b_k$  pour  $k = 1, \dots, r$  et  $e'_k = e_k$  sinon, la forme quadratique  $q$  a pour expression :

$$q(x'_1, \dots, x'_n) = \sum_{1 \leq k \leq r} x_k'^2$$

et sa matrice est  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 2.4.2 Cas d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}$

Dans le cas où le corps de base est  $\mathbb{R}$ , les coefficients  $a_k$ , pour  $k = 1, \dots, r$ , peuvent être positifs ou négatifs. On peut supposer que  $a_k > 0$  pour  $k \leq s$  et  $a_k < 0$  si  $s < k \leq r = s + t$  (on a éventuellement  $s = 0$  ou  $t = 0$ ). En choisissant  $b_k$  tel que  $b_k^2 = a_k$  si  $a_k > 0$  et  $b_k^2 = -a_k$  si  $a_k < 0$  et en définissant la base  $B'$  par  $e'_k = e_k/b_k$  pour  $k = 1, \dots, r$  et  $e'_k = e_k$  sinon, la forme quadratique  $q$  a pour expression :

$$q(x'_1, \dots, x'_n) = \sum_{1 \leq k \leq s} x_k'^2 - \sum_{s+1 \leq k \leq s+t} x_k'^2$$

et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.5 Signature d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}$

On vient de voir qu'une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  peut s'écrire sous la forme  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k \leq s} x_k^2 - \sum_{s+1 \leq k \leq s+t} x_k^2$ . Le rang de la forme  $q$  est  $s + t$ . On va montrer que les entiers  $s$  et  $t$  donnant le nombre de carrés avec un signe  $+$  et le nombre de carrés avec un signe  $-$  dans l'écriture de  $q$  ne dépendent pas de la base dans laquelle on a réussi à écrire  $q$  sous la forme précédente. Le couple  $(s, t)$  s'appelle signature de la forme  $q$ .

Supposons que  $q$  s'écrive par rapport à une base  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$  sous la forme  $q(x'_1, \dots, x'_n) = \sum_{1 \leq k \leq s'} x_k'^2 - \sum_{s'+1 \leq k \leq s'+t'} x_k'^2$ . On a  $s + t = s' + t'$ , le rang de  $q$ .

Posons  $F = Vect(e_1, \dots, e_s)$  et  $G = Vect(e_{s'+1}, \dots, e'_n)$ . Comme  $q$  est strictement positive sur  $F - \{0\}$  et négative sur  $G$ , on a  $F \cap G = \{0\}$ ; d'où  $s \leq s'$ ; par symétrie, on a aussi  $s' \leq s$ ; d'où  $s = s'$  et  $t = t'$ .

## 2.6 Classes d'équivalence de formes quadratiques sur $\mathbb{C}$

La décomposition de Gauss en sommes de carrés montre que, pour toute forme quadratique de rang  $r$  sur  $\mathbb{C}^n$ , il existe une base dans laquelle la matrice de  $q$  est de la forme  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

D'autre part, deux formes quadratiques équivalentes ont même rang. Donc les classes d'équivalence de formes quadratiques sur  $\mathbb{C}^n$  (ou sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ) correspondent aux entiers  $r$  tels que  $0 \leq r \leq n$ . Il existe donc  $n + 1$  classes d'équivalence de formes quadratiques sur  $\mathbb{C}^n$ .

## 2.7 Classes d'équivalence de formes quadratiques sur $\mathbb{R}$

Dans ce cas, la décomposition de Gauss en sommes de carrés montre que, pour toute forme quadratique de signature  $(s, t)$  sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe une base dans laquelle

la matrice de  $q$  est de la forme  $\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . D'autre part, deux formes qua-

dratiques équivalentes ont même signature. Donc les classes d'équivalence de formes quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$  (ou sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ) correspondent aux couples d'entiers  $(s, t)$  tels que  $0 \leq s, t \leq n$  et  $s + t \leq n$ ; on les dénombre facilement en remarquant que pour  $s = n, \dots, 0$ , il existe  $1, 2, \dots, n + 1$  valeurs de  $t$  possibles. Il existe donc  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  classes d'équivalence de formes quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.8 Orthogonalité

L'orthogonalité est définie dans les espaces munis d'un produit scalaire; nous la généralisons au cas des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques.

### Vecteurs orthogonaux

Soient  $(E, \varphi)$  un espace quadratique et  $q$  la forme quadratique associée à  $\varphi$ ; on

notera simplement  $E$  si cela ne crée pas d'ambiguïté. On dit que deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  sont orthogonaux (ou  $\varphi$ -orthogonaux ou  $q$ -orthogonaux) par rapport à  $\varphi$  (ou à  $q$ ) si  $\varphi(u, v) = 0$ .

En dimension finie, en choisissant une base  $B$  de  $E$  et en notant  $A$  la matrice associée à  $\varphi$  dans  $B$ ,  $U, V$  les matrices colonnes associées à  $u$  et  $v$ , la condition d'orthogonalité s'écrit encore  ${}^tUAV = 0$  (ou  ${}^tVAU = 0$ ). On dit que deux parties de  $E$  sont orthogonales par rapport à  $\varphi$  si tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre.

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , l'orthogonal de  $F$  est l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à  $F$ ; c'est un sous-espace vectoriel de  $E$  qu'on note  $F^\perp$ . Ces définitions copient celles données pour les produits scalaires. Mais des phénomènes nouveaux vont apparaître.

## Vecteurs isotropes

Avec les mêmes notations, un vecteur  $u$  non nul de  $E$  est dit *isotrope* si  $q(u) = 0$ , autrement dit s'il est orthogonal à lui-même. Une forme sans vecteur isotrope on dit aussi que la forme est *anisotrope*.

## Forme non dégénérée, noyau

Une forme  $\varphi$  est dite *non dégénérée* si  $E^\perp = \{0\}$ ; elle est *dégénérée* dans le cas contraire, c'est-à-dire quand il existe des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de  $E$ ; ces vecteurs sont bien sûrs isotropes. Quand la forme est dégénérée, on dit parfois que l'espace est *isotrope*. On appelle  $E^\perp$  le *noyau* de  $\varphi$ .

### Exemple 2.2

Pour la forme quadratique  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $q((x_1, x_2)) = x_1^2 - x_2^2$ , de forme polaire définie par  $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$ , le vecteur  $(1, 1)$  est *isotrope*; cependant, la forme  $\varphi$  est *non dégénérée*, car si  $u = (x_1, x_2)$  est dans le noyau de  $\varphi$ , on  $\varphi(u, e_1) = \varphi(u, e_2) = 0$ , ce qui impose  $x_1 = x_2 = 0$ .

## Orthogonalité et dualité

L'étude de l'orthogonalité définie par les formes bilinéaires et quadratiques va pouvoir, grâce à la correspondance entre formes bilinéaires et applications dans le dual, utiliser les résultats d'orthogonalité pour les vecteurs et formes linéaires.

On a vu en 1.5 qu'on pouvait associer à une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  une

application linéaire  $\Psi : E \rightarrow E^*$ , définie par  $\Psi(u)(v) = \varphi(u, v)$ . Dire que  $u$  et  $v$  sont orthogonaux pour  $\varphi$ , c'est dire que  $v \in \ker(\Psi(u))$ , ou encore, que  $v$  et  $\Psi(u)$  sont orthogonaux.

Si  $B$  est une base de  $E$ , de base duale  $B^*$ , et si  $A$  la matrice de  $\varphi$  dans la base  $B$ , alors  $A = M(\Psi, B, B^*)$ .

L'orthogonal d'un sous-espace  $F$  de  $E$  est l'ensemble des  $v \in E$  tels que, pour tout  $u \in F$ ,  $\Psi(u)(v) = 0$ , autrement dit l'orthogonal de  $F$  au sens de l'orthogonalité défini par  $\varphi$  dans  $E$  est l'orthogonal de  $\Psi(F)$ , ce qu'on peut écrire  $F^\perp = (\Psi(F))^\perp$ ; ces deux sous-espaces sont inclus dans  $E$ , mais la notation mélange deux relations d'orthogonalités, la première étant celle définie par  $\varphi$  dans  $E$ , la seconde étant celle définie par la dualité entre vecteurs de  $E$  et formes linéaires de  $E^*$ ; notons que certains auteurs choisissent deux symboles différents et notent  $F^\perp$  et  $F^\circ$  les sous-espaces orthogonaux à  $F$  suivant qu'il s'agit de l'une ou l'autre des relations d'orthogonalité. L'utilisation du même signe n'est pas gênante, pourvu qu'on sache de quoi on parle, mais nous essaierons d'éviter ces ambiguïtés.

L'orthogonal  $E^\perp$  de  $E$  dans  $E$  est égal à  $\ker(\Psi)$ , ce qui justifie l'appellation de noyau pour cet espace. On en déduit la proposition suivante.

### Proposition 2.2

Une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  est non dégénérée si et seulement si l'application linéaire  $\Psi : E \rightarrow E^*$  est injective. En dimension finie, cette propriété équivaut à dire que  $\Psi$  est bijective ou que la matrice de  $\varphi$  est inversible.

## 2.9 Espaces quadratiques réguliers

### Espace quadratique régulier

On appelle espace quadratique régulier un espace quadratique  $(E, q)$  tel que  $q$  soit une forme quadratique non dégénérée ou, ce qui revient au même, tel que la forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  associée à  $q$  soit non dégénérée.

### Orthogonalité dans les espaces quadratiques réguliers

Soient  $(E, \varphi)$  un espace quadratique régulier de dimension finie  $n$ . On vient de voir en 2.2 que l'application linéaire  $\Psi : E \rightarrow E^*$  définie par  $\varphi$  est un isomorphisme.

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , alors  $\dim(F) + \dim(\Psi(F)^\perp) = n$  et  $(F^\perp)^\perp = F$  pour l'orthogonalité entre vecteurs et formes linéaires, ce qui donne pour l'orthogonalité définie par  $\varphi$  :

$$\begin{aligned}\dim(F) + \dim(F^\perp) &= n \\ (F^\perp)^\perp &= F.\end{aligned}$$

Une conséquence immédiate est la suivante : si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces de  $E$ ,  $F^\perp = G^\perp$  implique, en prenant les orthogonaux,  $F = G$ .

### Sous-espace régulier d'un espace quadratique

Un sous-espace  $F$  d'un espace quadratique  $(E, q)$  est dit régulier si  $(F, q|_F)$  est un espace quadratique régulier, autrement dit si la restriction de  $q$  à  $F$  est non dégénérée.

Par exemple, une droite engendrée par un vecteur non isotrope est un sous-espace régulier.

Nous allons montrer, dans cette section, qu'un certain nombre de notions et de résultats sur les espaces euclidiens peuvent s'étendre, au moins partiellement, aux espaces quadratiques réguliers et aux sous-espaces réguliers.

Dans le cas d'un espace euclidien  $E$ , tout sous-espace  $F$  permettait de définir une décomposition de  $E$  comme somme directe de  $F$  et de son orthogonal. Ce résultat ne peut subsister en général dans un espace quadratique puisque si  $F$  contient un vecteur isotrope, l'intersection de  $F$  avec son orthogonal n'est pas réduite à  $\{0\}$  ( $F \cap F^\perp \neq \{0\}$ ). Cependant, on a le résultat suivant.

#### **Proposition 2.3 : propriétés des sous-espaces réguliers**

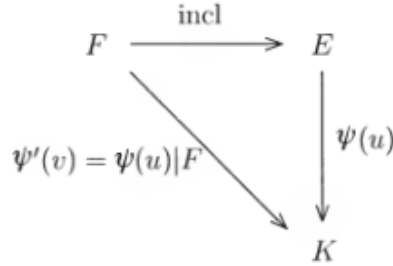
Soient  $(E, q)$  un espace quadratique régulier de dimension finie  $n$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ .

1.  $F$  est régulier si et seulement si  $E = F \oplus F^\perp$ .
2.  $F$  est régulier si et seulement si  $F^\perp$  est régulier.

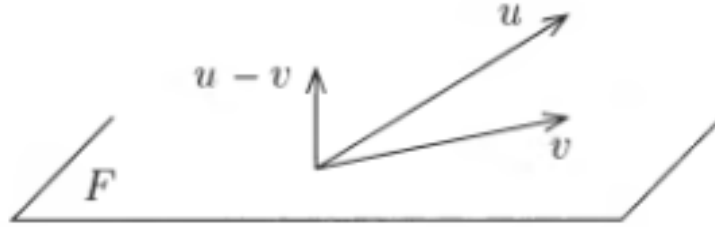
#### **Preuve.**

▷ Si  $F$  est régulier, on a  $F \cap F^\perp = \{0\}$ . Soit  $u \in E$  ; d'une part, en notant toujours  $\Psi : E \rightarrow E^*$  l'isomorphisme défini par  $\varphi$ ,  $\Psi(u)$ , forme linéaire sur  $E$ , définit par

restriction une forme linéaire sur  $F$  ; d'autre part,  $\Psi$  induit par restriction une application  $\Psi' : F \rightarrow F^*$  qui est un isomorphisme puisque  $F$  est régulier. Il existe donc  $v \in F$  tel que  $\Psi'(v) = \Psi(u)|_F$ . La situation est la suivante.



D'où  $\Psi(u - v)|_F = 0$  et  $u - v \in F^\perp$ .



On en déduit  $u = v + (u - v) \in F + F^\perp$  et  $F = F \oplus F^\perp$ . Réciproquement, si  $E = F \oplus F^\perp$ , on a  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , donc  $F$  est régulier.

▷ L'égalité  $F = (F^\perp)^\perp$  montre que  $F \cap F^\perp = (F^\perp)^\perp \cap F^\perp$ . Le 1) donne alors l'équivalente de l'énoncé. proposition montre que l'hyperplan orthogonal à un vecteur non isotrope est un sous-espace régulier. ■

## Somme orthogonale

Soient  $(E_1, q_1)$  et  $(E_2, q_2)$  deux espaces quadratiques. On définit sur l'espace  $E_1 \oplus E_2$  la forme quadratique  $q$  par  $q(u_1, u_2) = q_1(u_1) + q_2(u_2)$ . On appelle  $(E, q)$  la somme orthogonale des deux espaces et on écrit  $E = E_1 \perp E_2$ . Si  $(E_1, q_1)$  et  $(E_2, q_2)$  sont des espaces quadratiques réguliers, on vérifie que  $(E, q)$  est un espace quadratique régulier et que  $E_1^\perp = E_2$ ,  $E_2^\perp = E_1$ . Cette définition et cette propriété se généralisent à une famille finie d'espaces quadratiques. Si  $(E, q)$  est un espace quadratique et si  $F$  est un supplémentaire de  $E^\perp$ , alors  $E = E^\perp \perp F$ , car l'orthogonalité des deux

sous-espaces est claire. De plus, le sous- espace  $F$  est régulier, car il ne peut contenir de vecteur non nul orthogonal à  $F$  puisque ce vecteur serait élément du noyau  $E^\perp$  de  $q$ .

### Remarque 2.1

Certain auteurs utilisent le symbole  $\oplus$  plutôt que  $\perp$ ,  $q = q_1 \perp q_2 = q_1 \oplus q_2$ .

### Proposition 2.4 (*existence de bases orthogonales*)

Soit  $(E, q)$  un espace quadratique de dimension finie  $n$ . Il existe une base orthogonale pour  $q$ .

#### Preuve.

La proposition est vraie si  $q = 0$  puisqu'alors une base quelconque de  $E$  est orthogonale. Supposons  $q$  non nulle.

Raisonnons par récurrence sur  $n$ . La proposition est vraie pour  $n = 0$  ou  $n = 1$ .

Soit  $n > 1$  et supposons que le résultat soit vrai pour tout espace de dimension strictement inférieure à  $n$ .

Envisageons d'abord le cas où le noyau  $E^\perp$  de  $q$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ . Notons  $F$  un supplémentaire de  $E^\perp$  dans  $E$ ; on a  $\dim(F) < n$ . L'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une base orthogonale  $B$  de  $F$ ; sa réunion avec une base quelconque de  $E^\perp$  donne une base orthogonale de  $E$ .

Étudions maintenant le cas où  $E^\perp = \{0\}$ ; la forme  $q$  est non dégénérée et il existe un vecteur non isotrope  $u$ . L'espace  $Ku$  est régulier et on a  $E = Ku \perp (Ku)^\perp$  d'après la proposition 1. L'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une base orthogonale  $B$  de  $(Ku)^\perp$ ; cette base formée avec  $u$  une base orthogonale de  $E$ , ce qui achève le raisonnement par récurrence. ■

## 2.10 Plan hyperbolique

Un espace quadratique  $(E, q)$  de dimension 2 est un plan hyperbolique s'il existe une base  $B = (e_1, e_2)$  de  $E$  tel que la matrice de  $q$  soit 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors  $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ . On sait (voir exemple de 1.2) qu'il existe une base  $B'' = (e_1'', e_2'')$  de  $E$  dans laquelle la forme quadratique  $q$  est donnée par  $q(x_1'', x_2'') = x_1''^2 - x_2''^2$  et a pour matrice associée  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Un plan hyperbolique est un espace quadratique régulier.

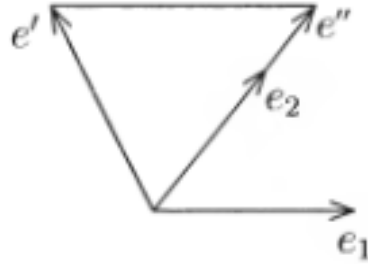
**Proposition 2.5** (*caractérisation des plans hyperboliques*)

Un espace quadratique régulier  $(E, q)$  de dimension 2 est un plan hyperbolique si et seulement si  $E$  contient un vecteur isotrope.

**Preuve.**

Si  $(E, q)$  un plan hyperbolique et si  $B = (e_1, e_2)$  est une base de  $E$  telle que la matrice de  $q$  soit  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  sont isotropes.

Réciproquement, soit  $(E, q)$  un espace quadratique régulier de dimension 2 contenant un vecteur isotrope  $e_1$ . Comme  $q$  n'est pas dégénérée, il existe un vecteur  $e' \in E$  tel que  $\varphi(e_1, e') \neq 0$  où  $\varphi$  est la forme polaire associée à  $q$ . On peut choisir  $\lambda \in K$  tel que  $e'' = e' + \lambda e_1$  soit isotrope : on a  $q(e' + \lambda e_1) = q(e') + 2\lambda\varphi(e_1, e')$  et il suffit de prendre  $\lambda = -\frac{q(e')}{2\varphi(e_1, e')}$ . On pose alors  $e_2 = \alpha e''$  avec  $\alpha$  tel que  $\varphi(e_1, e_2) = 1$ . On peut illustrer par le dessin suivant.



La matrice de  $q$  par rapport à la base  $B = (e_1, e_2)$  est de la forme désirée. ■

**Proposition 2.6**

Soit  $(E, q)$  un espace quadratique régulier de dimension  $n \geq 3$  contenant un vecteur isotrope  $e$ . Alors il existe un plan vectoriel  $H$  de  $E$  tel que la restriction de  $q$  à  $H$  donne un plan hyperbolique.

**Preuve.** Comme  $q$  est non dégénérée, il existe un vecteur  $e'$  tel que  $\varphi(e, e') \neq 0$ . On pose  $H = Vect(e, e')$  et on applique la proposition 2.5. ■

# Chapitre 3

## Formes quadratiques sur un corps quelconque

Ce chapitre suit également La démarche classique consistant à décomposer un objet en somme directe d'objets plus simples, on donne la classification des formes quadratiques sur les corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  et en particulier sur un corps fini.

La classification de formes quadratiques a déjà été considérée par Gauss ( pour des formes entières à deux variables).Plus récemment, on considère la classification sur des corps queleconques. La conjecture de Milnor (1970), démontrée récomment par Voevodsky, donne des éléments de réponse en termes d'invariants cohomologiques.

### 3.1 Formes quadratiques sur $\mathbb{Z}^2$

Une forme quadratique sur  $\mathbb{Z}^2$  est une application  $q : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par une expression  $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  où  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Le nombre  $ac - b^2$  appelé discriminant de la forme ; nous le supposerons non nul.

On a par exemple les sommes de carrés. En particulier, on peut se poser la question de savoir quels entiers sont sommes de deux carrés. Le théorème suivant répond à cette question.

**Théorème 3.1** (*Fermat*)

Un nombre premier  $p$  différent de 2 est une somme de deux carrés si et seulement si  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

**Théorème 3.2** (*Théorème de Lagrange*)

Tout entier positif est une somme de quatre carrés.

On peut se poser une question plus générale : étant donné un anneau  $A$ , quels sont les éléments qui s'écrivent comme somme de  $m$  carrés de  $A$  ? Cette question conduit à la notion de nombre de Pythagore.

**Définition 3.1** (Nombre de pythagore)

Le nombre de pythagore d'un anneau  $A$  est le plus petit entier  $P(A)$  tel que toute somme de carrés de  $A$  est une somme de  $P(A)$  carrés.

**Proposition 3.1**

On a les résultats suivants :

- i)  $P(\mathbb{Z}) = P(\mathbb{Q}) = 4$ .
- ii) Si  $k$  est un corps fini, alors  $P(k) = 2$ .
- iii)  $P(\mathbb{Q}(x)) = 5$  (*Pourchet*).
- iv)  $P(\mathbb{Q}(x, y)) \leq 8$  (Colliot-Thélène, Janson) ; valeur exacte inconnue.

**Définition 3.2** (Niveau d'un corps)

Le niveau d'un corps  $k$  est le plus petit entier  $s(k)$  tel que  $-1$  soit une somme de  $s(k)$  carrés de  $k$ . Si  $-1$  ne peut pas s'écrire comme une somme de carrés de  $k$ , on pose  $s(k) = \infty$ .

**Proposition 3.2**

On a les résultats suivants :

- i)  $s(\mathbb{Q}) = \infty$ .
- ii) Si  $k$  est un corps fini, alors  $s(k)$  vaut 1 (par exemple si  $k = \mathbb{F}_5$ ) ou 2.

**Théorème 3.3** (*Pfister, 1968*)

Le niveau d'un corps est soit infini , soit une puissance de 2.

### 3.1.1 Questions sur l'isotropie des formes quadratiques

**Définition 3.3** (Dimension d'une forme quadratique)

La dimension d'une forme quadratique est son nombre de variables.

**Définition 3.4** (Forme quadratique isotrope,anisotrope)

On dit qu'une forme quadratique  $q(X_1, \dots, X_n) = a_1X_1^2 + \dots + a_nX_n^2$  est isotrope si elle possède un zéro non trivial. Si  $q$  ne possède pas de zéro non-trivial, elle est dite anisotrope.

**Remarque 3.1**

On a vu que toute forme quadratique peut être diagonalisée, de manière à être de la forme de cette de la définition ci-dessus.

**Définition 3.5** ( $n$ -invariant de  $k$ )

Soit  $k$  un corps. Le  $n$ -invariant de  $k$ , noté  $u(k)$ , est la dimension maximale d'une forme anisotrope. S'il existe des formes anisotropes de degré arbitrairement grand, on pose  $u(k) = \infty$ .

**Exemple 3.1**

Si  $k$  un corps fini,  $u(k) = 2$  (on l'utilise dans la preuve du théorème de Lagrange). Il a été conjecturé que  $u(k)$  était soit infini soit une puissance de 2. Merkurjev a montré qu'il existe des corps  $k$  tel que  $u(k) = 6$ .

## 3.2 Formes équivalentes

Soient  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux formes bilinéaires symétriques sur  $E$ . Les formes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme  $f : E \rightarrow E$  tel que, pour tous  $u, v \in E$  :

$$\varphi_2(u, v) = \varphi_1(f(u), f(v)).$$

Cette relation est bien une relation d'équivalence. On a  $\text{im}(\varphi_1) = \text{im}(\varphi_2)$  ; l'ensemble des valeurs de  $\varphi_1$  est égal à l'ensemble des valeurs de  $\varphi_2$  .

Soient  $B$  une base de  $E$  et les matrices  $A_1$  de  $\varphi_1$ ,  $A_2$  de  $\varphi_2$ ,  $P$  de  $f$  par rapport à la base  $B$ . Pour tous  $u, v$  de  $E$ , de matrices colonnes  $U, V$  par rapport à la base  $B$ , on a  $\varphi_2(u, v) = {}^t U A_2 V$  et  $\varphi_1(f(u), f(v)) = {}^t (PU) A_1 (PV)$  ; on a donc  $A_2 = {}^t P A_1 P$ . Notons  $B' = f(B)$  la base image de  $B$  par  $f$  ; la matrice de passage  $M(\text{id}, B', B)$  est égale à  $P$ . La situation est décrite par le diagramme commutatif suivant où sont indiquées les applications, les bases et les matrices.

La matrice de  $\varphi_1$  dans la base  $B'$  est égale à la matrice de  $\varphi_2$  dans la base  $B$ , comme le résume le tableau suivant.

	$u$	$v$	$f(u)$	$f(v)$	$\varphi_1$	$\varphi_2$
matrice dans $B$	$U$	$V$	$PU$	$PV$	$A_1$	$A_2 = {}^t P A_1 P$
matrice dans $B'$			$U$	$V$	${}^t P A_1 P$	

Réciproquement, si deux formes bilinéaires symétriques  $\varphi_2$  et  $\varphi_1$  sur  $E$  ont même matrice  $A$  par rapport à des bases  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$  respectivement, elles sont équivalentes car, si on note  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $f(e_i) = e'_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ , les matrices colonnes  $U$  et  $V$  associées à  $u$  et  $v$  dans la base  $B$  sont les matrices colonnes de  $f(u)$  et  $f(v)$  dans la base  $B'$  et on a  $\varphi_2(u, v) = {}^t U A V = \varphi_1(f(u), f(v))$ . La détermination des classes de formes équivalentes est un problème important de la théorie des formes bilinéaires symétrique.

### 3.2.1 Questions de classifications

On pose la question de savoir quand deux formes quadratiques sont isomorphes.

#### Notation 1

On va noter la forme quadratique  $a_1 X_1^2 + \dots + a_n X_n^2$  par  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

**Définition 3.6** (Formes quadratiques isomorphes)

Deux formes quadratiques  $(E, q)$  et  $(E', q')$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de  $k$ -espaces vectoriels  $f : E \rightarrow E'$  tel que  $q'(f(x)) = q(x)$  pour tout  $x \in E$ .

Si  $(E, q)$  et  $(E', q')$  sont isomorphes, on note  $(E, q) \cong (E', q')$  ou  $\varphi \cong \varphi'$ .

### Proposition 3.3

On a une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de formes quadratiques et l'ensemble des classes d'isomorphisme de formes bilinéaires symétriques.

### Définition 3.7 (Orthogonal d'un sous-espace)

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique et soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'orthogonal de  $W$  par rapport à  $\varphi$  est l'ensemble

$$W^\perp = \{u \in E : \varphi(u, v) = 0, \forall v \in W\}.$$

### Proposition 3.4

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique et soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'orthogonal  $W^\perp$  de  $W$  par rapport à  $\varphi$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### Définition 3.8 (Radical d'une forme bilinéaire symétrique)

Le radical de  $(E, \varphi)$ , noté  $Rad(E, \varphi)$  est défini par  $E^\perp$ .

### Définition 3.9 (Forme quadratique non-dégénérée)

On dit qu'une forme quadratique est non-dégénérée si la forme bilinéaire symétrique associée est non-dégénérée. i.e., si  $E^\perp = \{0\}$ .

### Proposition 3.5

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Alors, il existe  $v \in E$  tel que  $\varphi(v, v) \neq 0$ .

**Preuve.**

Si ce n'est pas le cas, on a  $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(\varphi(u + v, u + v) - \varphi(u, u) - \varphi(v, v))$  qui vaut toujours 0. ■

### Corollaire 3.1

Une forme bilinéaire symétrique  $(E, \varphi)$  est non-dégénérée si et seulement si  $\det A \neq 0$  quelle que soit la base  $B$ .

### Définition 3.10 (Déterminant d'une forme bilinéaire symétrique)

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. On pose

$$\det(E, \varphi) = \det \mathcal{M}_B(\varphi) \in k^* / k^{*2}.$$

### Définition 3.11 (Somme orthogonal)

Soient  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$  deux formes bilinéaires symétriques. La somme orthogonale  $(E, \varphi) \oplus (E', \varphi')$  est par définition la forme bilinéaire symétrique  $(E \oplus E', \varphi \oplus \varphi')$ , où

$$(\varphi \oplus \varphi')(u + u', v + v') = \varphi(u, v) + \varphi'(u', v'), \quad \forall u, v \in E, \forall u', v' \in E'$$

### Remarque 3.2

Certains auteurs utilisent le symbole  $\perp$  plutôt que  $\oplus$ .

### Proposition 3.6

Soit  $(E, q)$  une forme quadratique ainsi que  $U$  et  $W$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tel que

$$E = U \oplus W, \quad \varphi_q(u, w) = 0, \quad \forall u \in U, w \in W.$$

Alors,  $(E, q) \cong (U, q|_U) \oplus (W, q|_W)$ .

### Proposition 3.7

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique. Alors, on a

$$(E, \varphi) \cong (\text{Rad}(E, \varphi), 0) \oplus (E', \varphi'),$$

où  $(E', \varphi')$  est non-dégénérée et est unique à isomorphisme près.

### Remarque 3.3

La proposition précédente implique que pour classer les formes bilinéaires symétriques, il suffit de classer les formes non-dégénérées .

### Théorème 3.4

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique sur  $k$  et  $W$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On suppose de plus que  $\varphi|_W$  est non dégénérée. Alors, on a

$$(E, \varphi) = (W, \varphi|_W) \oplus (W^\perp, \varphi|_{W^\perp}).$$

### Preuve.

On commence par montrer que  $E = W \oplus W^\perp$ . On a

$$W \cap W^\perp = \text{Rad}(W, \varphi|_W) = \{0\},$$

puisque  $\varphi|_W$  est non-dégénérée. Soit  $v \in V$ . On considère la forme

$$\varphi_v = \varphi(\cdot, v)|_W : W \rightarrow K, u \mapsto \varphi(u, v).$$

Comme  $\varphi|_W$  est non dégénérée, l'application  $\hat{\varphi}|_W : W \rightarrow W^*$  est un isomorphisme de  $k$ -espaces vectoriels. Ainsi, il existe  $u_0 \in W$  tel que  $\varphi(u, v) = \widehat{\varphi|_W}(u_0)(u)$  pour tout  $u \in W$ . Autrement dit, on a  $\varphi(u, v) = \varphi(u, u_0)$ ,  $\forall u \in W$ ,

ce qui entraîne que  $v - u_0 \in W^\perp$ . Ainsi, on peut écrire  $v = u_0 + (v - u_0)$ . Puisque  $E = W \oplus W^\perp$ , la proposition 3.6 implique que lon peut écrire

$$(E, \varphi) = (W, \varphi|_W) \oplus (W^\perp, \varphi|_{W^\perp}).$$

■

### 3.3 Diagonalisation

#### Définition 3.12

Soit  $n \in \mathbb{N}$  ainsi que  $a_1, \dots, a_n$  des éléments non nuls de  $K$ . On note  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  la forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel  $K^n$  définie par

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle(u, v) = \sum_{i=1}^n a_i u_i v_i, \quad \forall u, v \in K^n.$$

#### Proposition 3.8

La forme quadratique de dimension  $n$  définie ci-dessus est non-dégénérée.

**Preuve.**

On regarde la matrice de  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  dans la bas canonique :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

Puisque tous les  $a_i$  sont non-nuls, cette matrice est inversible ce qui implique que  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  est non-dégénérée . ■

#### Définition 3.13

Soit  $(E, \varphi)$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. On dit que  $(E, \varphi)$  est diagonalisable s'il existe des éléments non-nuls  $a_1, \dots, a_n \in K$  tel que l'on ait  $(E, \varphi) \cong (K^n, \langle a_1, \dots, a_n \rangle)$ .

**Remarque 3.4**

Si  $f : (E, \varphi) \cong (K^n, \langle a_1, \dots, a_n \rangle)$ , alors la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(f^{-1}(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ , où  $(e_i)_i$  est la base canonique de  $K^n$ , est la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}.$$

De plus, la famille  $(f^{-1}(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une base orthogonale de  $V$  par rapport à  $\varphi$ .

**Remarque 3.5**

On a  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \oplus \langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle$  pour tout  $(n + m)$ -tuple  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in k^*$ .

**Théorème 3.5**

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur  $K$ . Alors  $(E, \varphi)$  est diagonalisable.

**Preuve.**

On raisonne par récurrence sur  $n = \dim E$ . Le cas  $n = 1$  est clair.

On suppose donc la propriété vérifiée pour toute forme bilinéaire symétrique non-dégénérée de dimension inférieure à  $n$ . Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée de dimension  $n$ . En particulier, il existe  $v \in E \setminus \{0\}$  tel que  $\varphi(v, v) \neq 0$  (car la forme quadratique associée est non-dégénérée). En posant  $W = \langle v \rangle$ , on obtient que  $(W, \varphi|_W) \cong (K, \langle \varphi(v, v) \rangle)$  est non-dégénérée. le théorème 3.4 entraîne que

$$(V, \varphi) = (W, \varphi|_W) \oplus (W^\perp, \varphi|_{W^\perp}) \cong (K, \langle \varphi(v, v) \rangle) \oplus (W^\perp, \varphi|_{W^\perp}).$$

On utilise ensuite l'hypothèse de récurrence pour diagonaliser  $\varphi|_{W^\perp}$ . A partir d'ici, toutes les formes considérées sont non-dégénérées. ■

### 3.3.1 Théorème de Witt

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique ainsi que  $u \in E$  tel que  $\varphi(u, u) \neq 0$ . Alors, on a  $E = \langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^\perp$  (théorème 3.4).

**Définition 3.14** (Réflexion)

On appelle réflexion associée à  $u$  la symétrie orthogonale  $\tau_u$  de  $E$  par rapport à  $\langle u \rangle^\perp$  parallèlement à  $\langle u \rangle$ . Pour  $v = v_1 + v_2$ , où  $v_1 \in \langle u \rangle^\perp$  et  $v_2 \in \langle u \rangle$ , on a  $\tau_u(v) = v_1 - v_2$ .

Plus explicitement, on a

$$v_2 = \frac{\varphi(v, u)}{\varphi(u, u)}u, \quad v_1 = v - v_2 = v - \frac{\varphi(v, u)}{\varphi(u, u)}u.$$

Il est alors facile de vérifier que  $v_1 \in \langle u \rangle^\perp$ . Finalement, on a

$$\tau_u(v) = v - \frac{2 \cdot \varphi(v, u)}{\varphi(u, u)}u.$$

**Remarque 3.6**

La réflexion  $\tau_u$  est un isomorphisme pour  $\varphi$ .

**Théorème 3.6**

Soit  $(E, \varphi)$  une forme bilinéaire symétrique sur  $K$  ainsi que  $u, v \in E$  des vecteurs tels que  $\varphi(u, u) = \varphi(v, v) \neq 0$ . Alors, il existe un isomorphisme  $\sigma : E \rightarrow E$  pour  $\varphi$  tel que  $\sigma(u) = v$ .

**Preuve.**

On pose  $x = \frac{1}{2}(u + v)$  et  $y = \frac{1}{2}(u - v)$ , ce qui entraîne  $u = x + y$  et  $v = x - y$ . On remarque de plus que  $x$  et  $y$  sont orthogonaux, ce qui implique que  $\varphi(u, u) = \varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(y, y)$ . Comme  $\varphi(u, u) \neq 0$ , on a  $\varphi(x, x) \neq 0$  ou  $\varphi(y, y) \neq 0$ . Si  $\varphi(x, x) \neq 0$ , on a  $v = -\tau_x(u)$ . Si  $\varphi(y, y) \neq 0$ , on a  $v = \tau_y(u)$ . ■

**Théorème 3.7** (*Théorème de Witt*)

Soient  $(E_1, \varphi_1), (E_2, \varphi_2)$  et  $(E, \varphi)$  trois formes bilinéaires symétriques avec  $(E, \varphi)$  non-dégénérée. Alors, si  $(E_1, \varphi_1) \oplus (E, \varphi) \cong (E_2, \varphi_2) \oplus (E, \varphi)$ , on a  $(E_1, \varphi_1) \cong (E_2, \varphi_2)$ .

**Preuve.**

On raisonne par récurrence sur la dimension de  $E$ . Comme  $(E, \varphi)$  est non-dégénérée, elle est diagonalisable. Si  $(v_1, \dots, v_n)$  une base orthogonale de  $E$  pour  $\varphi$ , on a

$$(E, \varphi) \cong \bigoplus_{i=1}^n (\langle v_i \rangle, \varphi|_{\langle v_i \rangle}).$$

De plus, si  $f$  désigne l'isomorphisme de  $(E_1, \varphi_1) \oplus (E, \varphi)$  dans  $(E_2, \varphi_2) \oplus (E, \varphi)$  et si  $v_i^k$  désigne le vecteur  $v_i$  vu dans  $E_k \oplus E$ , on obtient

$$(E_1, \varphi_1) \oplus \bigoplus_{i=1}^n (\langle v_i^1 \rangle, \varphi|_{\langle v_i^1 \rangle}) \cong (E_2, \varphi_2) \oplus \bigoplus_{i=1}^n (\langle v_i^2 \rangle, \varphi|_{\langle v_i^2 \rangle}),$$

via  $f$ . On considère les vecteurs  $v_n^k \in E_k \oplus E$ . Puisque  $f$  est un isomorphisme, on a

$$(\varphi_2 \oplus \varphi)(f(v_n^1), f(v_n^1)) = (\varphi_1 \oplus \varphi)(v_n^1, v_n^1) = \varphi(v_n, v_n) = (\varphi_2 \oplus \varphi)(v_n^2, v_n^2).$$

Le théorème précédent implique l'existence d'un isomorphisme

$\sigma : E_2 \oplus E \rightarrow E_2 \oplus E$  pour  $\varphi_2 \oplus \varphi$  tel que  $\sigma(f(v_n^1)) = v_n^2$ . Alors,

$\sigma f : E_1 \oplus E \rightarrow E_2 \oplus E$  est un isomorphisme tel que  $(\sigma f)(v_n^1) = v_n^2$ . Par conséquent,

$$\sigma f|_{\langle v_n^1 \rangle^\perp} : \langle v_n^1 \rangle^\perp \rightarrow \langle v_n^2 \rangle^\perp$$

est une isométrie, ce qui entraîne que

$$(E_1, \varphi_1) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\langle v_i^1 \rangle, \varphi|_{\langle v_i^1 \rangle}) \cong (E_2, \varphi_2) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\langle v_i^2 \rangle, \varphi|_{\langle v_i^2 \rangle}).$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que  $(E_1, \varphi_1) \cong (E_2, \varphi_2)$ . ■

**Notation 2**

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique.

On pose  $D(\varphi) = \{\alpha \in k^* : \exists u \in E, \varphi(u, u) = \alpha\}$ .

## Exemples 3.2

### Le cas des nombres complexes

#### Proposition 3.9

Toute forme bilinéaire symétrique non-dégénérée est isomorphe à  $\langle 1, \dots, 1 \rangle$ .

#### Preuve.

Toute forme est isomorphe à  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , avec  $a_i \in \mathbb{C}$ . Puisque  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, on a  $a_i = b_i^2$ . Ainsi,

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1^2, \dots, b_n^2 \rangle \cong \langle 1, \dots, 1 \rangle.$$

■

#### Corollaire 3.2

Deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur  $\mathbb{C}$  sont isomorphes si et seulement si elles ont la même dimension.

### Le cas des nombres réels

#### Proposition 3.10

Tout forme bilinéaire symétrique non-dégénérée est isomorphe à  $\langle \underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_s \rangle$ .

De plus,  $r$  et  $s$  sont uniquement déterminés.

#### Définition 3.15 (Signature d'une forme)

Le couple  $(r, s)$  donné par la proposition ci-dessus est appelé signature de la forme.

#### Proposition 3.11

Deux formes sont isomorphes si et seulement si elles ont la même signature.

## Le cas des corps finis

On considère  $K = \mathbb{F}_q$ .

### Lemme 3.1

Si  $\dim E \geq 2$ , alors  $D(\varphi) = K^*$ .

### Théorème 3.8

Toute forme est isomorphe à une forme du type  $\langle 1, \dots, 1, \alpha \rangle$  avec  $\alpha \in K^*$ .

#### Preuve.

On réalise une récurrence sur la dimension sur  $n = \dim E$ . Si  $n = 1$ , rien est montrer. On suppose donc que  $n \geq 2$  et le lemme implique que  $1 \in D(\varphi)$ .

On a donc  $\varphi \cong \langle 1 \rangle \oplus \varphi'$  et on applique l'hypothèse de récurrence. ■

### Lemme 3.2

On a l'isomorphisme  $\mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}_q^{*2} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ainsi,  $\mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}_q^{*2} = \{1, \alpha\}$  avec  $\alpha$  qui n'est pas un carré.

### Corollaire 3.3

Il existe exactement deux classes d'isomorphisme de formes par dimension. Les deux représentats sont

$$\langle 1, \dots, 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle 1, \dots, 1, \alpha \rangle,$$

où  $\alpha$  n'est pas un carré.

### Corollaire 3.4

Deux formes sont isomorphes si seulement si elles ont la même dimension et le même déterminant.

## 3.4 Produit tensoriel

Soit  $K$  un corps. Si  $E_1, \dots, E_n, F$  sont des espaces vectoriels, l'espace vectoriel des applications  $n$ -linéaires

$$f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F.$$

**Définition 3.16**

une application multilinéaire est une application qui linéaire (  $K$ -linéaire, plus précisément) en chaque variable. Les mots linéaires et homomorphisme sont ici interchangeables. Sauf mention contraire. Les espaces vectoriels, les homomorphismes, les applications linéaires et multilinéaires se rapportent à le corps  $K$ .

Soit  $E$  l'espace vectoriel engendré par l'ensemble de tous les  $n$ -uplets  $(x_1, \dots, x_n)$  ( $x_i \in E_i$ ), donc engendré par l'ensemble  $E_1 \times \dots \times E_n$ . Soit  $W$  le sous- espace vectoriel engendré par tous les éléments de type

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n), \\ (x_1, \dots, ax_i, \dots, x_n) - a(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

Pour tous  $x_i \in E_i$ ,  $x'_i \in E_i$  et  $a \in K$ . En composant l'injection canonique

$$E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E,$$

de l'ensemble générateur dans l'espace vectoriel, avec la projection canonique  $E \rightarrow E/W$  sur l'espace vectoriel quotient, on obtient une application

$$\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E/W.$$

Nous affirmons que  $\varphi$  est multilinéaire et est un produit tensoriel. Que  $\varphi$  soit multilinéaire est évident, par sa construction même. Soit

$$f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow G$$

Une application multilinéaire. Par la définition du l'espace vectoriel engendré par

$$E_1 \times \dots \times E_n,$$

Il existe une application linéaire induite  $E \rightarrow G$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \nearrow & F \\ f & \searrow & G \end{array}$$

Comme  $f$  est multilinéaire, l'application  $E \rightarrow G$  induite s'annule sur  $W$ . Par la propriété universelle des espaces vectoriels quotients,  $f$  se factorise ainsi par  $E/W$  et on obtient un homomorphisme  $f_* : E/W \rightarrow G$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \xrightarrow{\varphi} & E/W \\ f & \searrow & \downarrow f_* \\ & & G \end{array}$$

Comme l'image de  $\varphi$  engendre  $E/W$ , l'application induite  $f_*$  est déterminée de façon unique. La preuve est ainsi complète. L'espace vectoriel  $E/W$  sera noté

$$E_1 \otimes \dots \otimes E_n \quad \text{ou aussi} \quad \bigotimes_{i=1}^n E_i.$$

Nous avons ainsi construit un produit tensoriel spécifique dans la classe d'isomorphisme des produits tensoriels et nous l'appellerons le produit tensoriel des  $E_1, \dots, E_n$ .

Pour  $x_i \in E_i$ , on pose  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n = x_1 \otimes_R \dots \otimes_R x_n$ .

On a, pour tout  $i$  et pour tous  $x_i, x'_i \in E_i, a \in K$ ,

$$x_1 \otimes \dots \otimes ax_i \otimes \dots \otimes x_n = a(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$$

et

$$x_1 \otimes \dots \otimes (x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n = (x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + (x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n).$$

Dans le cas de deux facteurs,  $E$  et  $F$ , tout élément de  $E \otimes F$  peut s'écrire comme une somme de termes  $x \otimes y$ , avec  $x \in E$  et  $y \in F$ , car ces termes engendrent  $E \otimes F$  et, pour  $a \in K, a(x \otimes y) = ax \otimes y$ .

### Proposition 3.12

Soient  $E_1, E_2$  et  $E_3$  des espaces vectoriels. Il existe un unique isomorphisme

$$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \rightarrow E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3),$$

tel que, pour  $x \in E_1, y \in E_2, z \in E_3$ ,  $(x \otimes y) \otimes z \rightarrow x \otimes (y \otimes z)$ .

**Preuve.**

comme les éléments du type  $(x \otimes y) \otimes z$  engendrent le produit tensoriel, l'unicité est évidente. Pour prouver l'existence, soit  $x \in E_1$ . il est clair que l'application

$$\lambda_x : E_2 \times E_3 \rightarrow (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3.$$

Telle que  $\lambda_x(y, z) = (x \otimes y) \otimes z$ , est bilinéaire et se factoriser ainsi par une application linéaire le produit tensoriel.  $\bar{\lambda}_x : E_2 \otimes E_3 \rightarrow (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ .

L'application  $E_1 \times (E_2 \otimes E_3) \rightarrow (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ ,

telle que  $(x, \alpha) \mapsto \bar{\lambda}_x(\alpha)$ , Pour  $x \in E_1$  et  $\alpha \in E_2 \otimes E_3$ , est alors évidemment bilinéaire et se factoriser par une application linéaire

$$E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \rightarrow (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3,$$

Qui a la propriété désirée. ■

### 3.4.1 Le produit tensoriel de formes quadratiques

#### Proposition 3.13

Soit  $\varphi$  une forme de dimension  $n$  et  $\Psi$  une forme de dimension  $m$ . Alors

$$\det(\varphi \otimes \Psi) = (\det \varphi)^m \cdot (\det \Psi)^n.$$

**Preuve.**

Si on écrit  $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  et  $\Psi = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ , on vérifie facilement que

$$\varphi \otimes \Psi = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \langle a_i \cdot b_j \rangle.$$

Ainsi, chaque  $a_i$  apparaîtra  $m$  fois dans le déterminant et chaque  $b_j$  apparaîtra  $n$  fois. ■

### 3.4.2 Anneaux de Witt

On rappelle que toutes les formes bilinéaires considérées sont non-dégénérées.

**Définition 3.17** (Forme isotrope, forme anisotrope)

On dit que  $(E, \varphi)$  est isotrope s'il existe  $u \in E$  non-nul, tel que  $\varphi(u, u) = 0$ . S'il n'existe pas de tel  $u$ , on dit que  $\varphi$  est anisotrope.

**Lemme 3.3**

Soit  $u \in E \setminus \{0\}$ . Alors, il existe  $v \in E$  avec  $\varphi(u, v) = 1$ .

**Proposition 3.14**

Soit  $\varphi$  une forme de dimension 2. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $\varphi$  est isotrope ;
- ii)  $\det \varphi = -1$  ;
- iii)  $\varphi \cong \langle 1, -1 \rangle$  c'est-à-dire  $\exists B' / \mathcal{M}_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- iv) il existe une base dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Preuve.**

Il suffit de montrer  $(ii) \Rightarrow (i)$  et  $(i) \Rightarrow (iv)$ . Ensuite, les autres implications de la chaîne  $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii)$  sont claires.

$(ii) \Rightarrow (i)$  On a  $b \cong \langle \alpha, \beta \rangle$  avec  $\alpha, \beta \in K^*$  et, par hypothèse,  $\det \varphi = \alpha\beta = -1 \in k^*/k^{*2}$ . Ainsi,  $\beta = -\alpha \in K^*/K^{*2}$ , c'est-à-dire  $\varphi = \langle \alpha, \beta \rangle \cong \langle \alpha, -\alpha \rangle$ , qui est isotrope.

$(i) \Rightarrow (iv)$  Il existe donc  $u \in E \setminus \{0\}$  tel que  $\varphi(u, u) = 0$ . Le lemme précédente entraîne l'existence de  $v \in E$  tel que  $\varphi(u, v) = 1$ . Si  $\varphi(v, v) = \alpha$ , la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\{u, v\}$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ .

On pose  $t = v - \frac{\alpha}{2}u$ , ce qui implique que la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\{u, t\}$

$$\text{est } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

**Définition 3.18** (Plan hyperbolique, base hyperbolique)

Une forme qui satisfait l'une des propriétés ci-dessus est appelée plan hyperbolique et est notée  $H$ . Une base  $\{u, v\}$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  s'appelle base hyperbolique.

**Proposition 3.15**

Soit  $\varphi$  une forme isotrope. Alors, il existe une forme  $\varphi'$  telle que  $\varphi \cong H \oplus \varphi'$ .

**Preuve.**

On suppose que  $\varphi$  est isotrope et on considère un élément  $u \neq 0$  tel que  $\varphi(u, u) = 0$ . On considère de plus  $v \in E$  tel que  $\varphi(u, v) = 1$  et on pose  $W = Kx \oplus Ky \subset E$ . Alors, un petit calcul montre que la restriction de  $\varphi$  à  $W$  est non-dégénérée et est donc un facteur orthogonal. La proposition précédente implique que  $\varphi|_W \cong H$ . L'utilisation du théorème 3.4 permet de terminer la preuve.  $\blacksquare$

**Remarque 3.7**

La proposition précédente implique que pour comprendre les formes, il suffit de comprendre les formes anisotropes.

**Définition 3.19** (Forme universelle)

On dit qu'une forme  $\varphi$  est universelle si  $D(\varphi) = K^*$ .

**Exemple 3.3**

Toute forme de dimension supérieure ou égale à 2 sur un corps fini est universelle.

**Proposition 3.16**

Toute forme isotrope est universelle .

**Preuve.**

La proposition précédente implique qu'il suffit de montrer que  $H$  est universelle.

Soit  $\{u, v\}$  une base hyperbolique de  $K^2$  et soit  $\alpha \in K^*$ . On pose  $t = u + \frac{\alpha}{2}v$ ,

et on vérifie que  $\varphi(t, t) = \alpha$ . ■

**Proposition 3.17**

Soit  $\alpha \in K^*$ . Alors,  $\alpha \in D(\varphi)$  si et seulement si  $\varphi \oplus \langle -\alpha \rangle$  est isotrope.

**Preuve.**

$\Rightarrow$  Clair.

$\Leftarrow$  Soit  $u + \lambda e$  un vecteur isotrope pour  $\varphi \oplus \langle -\alpha \rangle$ . On a alors  $\varphi(u, u) - \lambda^2 \alpha = 0$ .

Si  $\lambda = 0$ , alors  $u$  est un vecteur isotrope de  $\varphi$ . Comme  $\varphi$  est isotrope, alors  $\varphi$  est universelle et  $\alpha \in D(\varphi)$ . On suppose que  $\lambda \neq 0$  et on pose  $v = \frac{u}{\lambda}$ . Alors,

$$\varphi(v, v) = \varphi\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{u}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2} \varphi(u, u) = \alpha,$$

ce qui implique que  $\alpha \in D(\varphi)$ . ■

**Définition 3.20** (Forme hyperbolique)

Une forme hyperbolique est une somme orthogonale de plans hyperboliques.

**Proposition 3.18**

Soit  $(E, \varphi)$  une forme. Les assertions sont équivalentes :

- i) La forme  $\varphi$  est hyperbolique.
- ii) Il existe un sous-espace vectoriel  $W$  de  $E$  avec  $\dim W = \frac{1}{2} \dim E$  et  $\varphi|_{W \times W} = 0$ .
- iii) Il existe un sous-espace vectoriel  $W$  de  $E$  tel que  $W^\perp = W$ .

**Proposition 3.19**

Soit  $(E, \varphi)$  une forme. On peut écrire  $(E, \varphi) \cong (E_h, \varphi_h) \oplus (E_a, \varphi_a)$ , où  $\varphi_h$  est hyperbolique et  $\varphi_a$  est anisotrope. De plus, cette décomposition est unique à isomorphisme près, par le théorème de Witt.

**Définition 3.21** (Décomposition de Witt)

La décomposition de la forme  $(E, \varphi)$  de la proposition précédente est appelée décomposition de Witt.

**Définition 3.22** (Indice de Witt)

Soit  $(E, \varphi)$  et  $(E_h, \varphi_h) \oplus (E_a, \varphi_a)$  sa décomposition de Witt. Par hypothèse, on peut écrire  $(E_h, \varphi_h) = \underbrace{H \oplus \dots \oplus H}_r$  et l'entier  $r$  est appelé indice de Witt de  $\varphi$ .

Soit  $\mathcal{M}_k$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de formes (bilinéaires, symétriques et non-dégénérées sur  $K$ ). On définit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_k$  :

$$\varphi \sim \varphi' \Leftrightarrow \varphi \oplus h \cong \varphi' \oplus h'$$

pour des formes  $h$  et  $h'$  hyperboliques. On pose  $W(k) = \mathcal{M}_k / \sim$  et on aimerait munir  $W(k)$  d'une structure d'anneaux avec  $(W(k), \oplus, \otimes)$ .

**Lemme 3.4**

Pour toute forme  $\varphi$ , on a  $\varphi \oplus -\varphi \sim 0$ .

**Preuve.**

On pose  $W = \{(u, u) : u \in E\} \subset E \oplus E$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $E \oplus E$  et on utilise la proposition 2.64. Il est clair que  $\varphi \oplus -\varphi$  est nulle sur  $W$ .

On vérifie alors que  $W(k)$  est un anneau commutatif. ■

**Remarque 3.8**

Soient  $\varphi$  et  $\varphi'$  deux formes bilinéaires symétriques.

- 1) On a  $\varphi \sim \varphi'$  si et seulement si  $\varphi_a \cong \varphi'_a$ . En effet, si  $\varphi \sim \varphi'$ , cela implique que  $\varphi \oplus H \oplus \dots \oplus H \cong \varphi' \oplus H \oplus \dots \oplus H$ , c'est-à-dire  $\varphi_a \oplus H \oplus \dots \oplus H \cong \varphi'_a \oplus H \oplus \dots \oplus H$ .

Le théorème de simplification de Witt permet de conclure. L'autre sens est clair.

- 2) Supposons que  $\varphi$  et  $\varphi'$  soient de même dimension. Alors,  $\varphi \sim \varphi'$  si et seulement si  $\varphi \cong \varphi'$ .

**Exemples 3.4****Le cas des nombres complexes**

Dans ce cas,  $W(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$ . En effet, on a un homomorphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} W(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \\ \varphi &\longmapsto \dim(\varphi) \bmod 2. \end{aligned}$$

On sait que toute forme  $\varphi$  s'écrit comme  $\varphi \cong \langle 1, \dots, 1 \rangle$ . De plus, puisque  $-1$  est un carré, on a  $H \cong \langle 1, 1 \rangle$ , ce qui entraîne

$$\varphi \cong \begin{cases} \langle 1 \rangle \oplus H \oplus \dots \oplus H & \text{si } \dim \varphi \equiv 1 \pmod{2} \\ H \oplus \dots \oplus H & \text{si } \dim \varphi \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

### Le cas des nombres réels

On a vu que toute forme bilinéaire symétrique non-dégénérée est isomorphe à  $\underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_r, \underbrace{\langle -1, \dots, -1 \rangle}_s$ , avec  $r$  et  $s$  uniquement déterminés. On va alors poser :

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \varphi &\mapsto r - s. \end{aligned}$$

On aimerait montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme. Supposons que  $r \geq s$ , alors

$$\underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_{r-s} \oplus \underbrace{\langle 1, -1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 1, -1 \rangle}_s = \underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_{r-s} \oplus H \oplus \dots \oplus H.$$

Les autres cas se traitent de manière semblable.

### Le cas des corps finis

On considère  $K = \mathbb{F}_q$  et on va donner la structure de groupe de  $W(K)$ .

### Théorème 3.9

On a un isomorphisme de groupes

$$W(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } q \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si } q \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

### Preuve.

On a  $\varphi \cong \langle 1, \dots, 1 \rangle$  ou  $\varphi \cong \langle \alpha, 1, \dots, 1 \rangle$ , où  $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$ .

▷ Supposons que  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , ce qui entraîne que  $-1$  est un carré. Ainsi,  $\langle 1, 1 \rangle = \langle 1, -1 \rangle$ , ce qui implique que  $\varphi$  est dans la classe de Witt de l'une des formes suivantes :  $\langle 1 \rangle, \langle \alpha \rangle, \langle 1, \alpha \rangle, H$ . En effet, si la dimension de  $\varphi$  est strictement supérieure à 3, alors  $\varphi$  est isotrope, ce qui entraîne  $\varphi \cong H \oplus c$ . En itérant ce processus, on obtient

que  $\varphi \sim d$ , où  $d$  est de dimension inférieure ou égale à 2. Il reste à vérifier que ces 4 éléments sont d'ordre deux, pour exclure  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . On calcule :

$$\begin{aligned}\langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle &\cong H \sim 0, & \langle \alpha \rangle \oplus \langle \alpha \rangle &\cong \langle \alpha \rangle \oplus \langle -\alpha \rangle \sim 0 \\ \langle 1, \alpha \rangle \oplus \langle 1, \alpha \rangle &= \langle 1, 1 \rangle \oplus \langle \alpha, \alpha \rangle \cong H \oplus H \sim 0\end{aligned}$$

▷ Supposons que  $q \equiv 3 \text{ modulo } 4$ . Si  $\dim \varphi \geq 3$ , alors  $\varphi$  est isotrope, ce qui entraîne  $\varphi \cong H \oplus \dots \oplus H \oplus \varphi'$ . Ainsi,  $\varphi \sim \varphi'$  avec  $\dim \varphi'$  valant 1 ou 2. Pour commencer, on remarque que l'on peut prendre  $\alpha = -1 \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$ . Les formes de dimension 1 et 2 sont les suivantes :  $\langle 1 \rangle, \langle -1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, H \cong \langle 1, -1 \rangle$ .

Ces classes sont distinctes car  $-1$  n'est pas un carré. On remarque que les éléments  $\langle 1 \rangle$  et  $\langle -1 \rangle$  sont d'ordre 4. Pour le premier, on a  $\langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle \approx \langle 1, -1 \rangle$ , puisque les déterminants ne sont pas les mêmes. Pour le deuxième élément, le raisonnement est semblable. ■

### Remarque 3.9

Toute forme de dimension au moins 3 sur un corps fini est isotrope (ce qui est équivalent à dire que toute forme de dimension 2 est universelle).

## 3.5 Formes de Pfister et sommes de carrés

On établit les mêmes conventions que précédemment :

- $K$  désigne un corps de caractéristique différente de 2.
- Le terme “forme” désigne une forme quadratique (ou bilinéaire symétrique) non-dégénérée.

### Définition 3.23 (Forme de Pfister)

Soient  $a_1, \dots, a_n \in K^*$ . On pose  $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = \langle 1, a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 1, a_n \rangle$ , qui est une forme de dimension  $2^n$ . Dans ce cas,  $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$  est appelée  $n$ -forme de Pfister ou forme de Pfister.

**Définition 3.24** ( Ensemble des facteurs de similitude)

Soit  $\varphi$  une forme. On pose  $G(\varphi) = \{a \in K^* : a\varphi \cong \varphi\}$ , qui est l'ensemble des facteurs de similitude de  $\varphi$ .

**Proposition 3.20**

Pour une forme  $\varphi$ ,  $G(\varphi)$  est un sous-groupe de  $K^*$ .

**Définition 3.25** (Forme multiplicative)

On dit qu'une forme isotrope  $\varphi$  est multiplicative si elle est hyperbolique. On dit qu'une forme anisotrope  $\varphi$  est multiplicative si  $D(\varphi) = G(\varphi)$ .

**Lemme 3.5**

Soit  $\varphi$  une forme telle que  $1 \in D(\varphi)$ . Alors,  $G(\varphi) \subset D(\varphi)$ .

**Preuve.**

Par hypothèse, on a  $\varphi = \langle 1, \dots \rangle$ . Si l'on considère  $\alpha \in G(\varphi)$ , on a  $\langle \alpha, \dots \rangle = \alpha\varphi \cong \varphi$ , ce qui entraîne que  $\alpha \in D(\varphi)$ . ■

**Lemme 3.6**

On considère  $a \in K^*$  et on pose  $\varphi = \langle 1, a \rangle$ . Alors :

- i)  $D(\varphi) = G(\varphi)$ .
- ii)  $\varphi$  est multiplicative.

**Preuve.**

(i) Comme  $\varphi$  représente 1, le lemme précédent implique directement  $G(\varphi) \subset D(\varphi)$ . On prend maintenant  $\alpha \in D(\varphi)$ . On peut écrire  $\varphi \cong \langle \alpha, \beta \rangle$ , pour un certain  $\beta \in K^*$ . On a de plus  $\alpha\varphi = \alpha\langle 1, a \rangle = \langle \alpha, a\alpha \rangle$ , et donc  $\det(\langle \alpha, a\alpha \rangle) = a\alpha^2 = a = \alpha\beta \in K^*/K^{*2}$ . Cela entraîne que  $\beta = \alpha a \in K^*/K^{*2}$  et  $\varphi = \langle \alpha, \beta \rangle \cong \langle \alpha, \alpha a \rangle$ .

Ainsi,  $\varphi \cong \langle \alpha, \alpha a \rangle = \alpha\langle 1, a \rangle = \alpha\varphi$ , comme désiré.

(ii) On va distinguer le cas où  $\varphi$  est anisotrope et le cas où elle ne l'est pas. Si  $\varphi$  est anisotrope, cela découle de 1. Si  $\varphi$  est isotrope, on a  $\varphi \cong H$ , puisque  $\dim \varphi = 2$ .

■

**Lemme 3.7**

Soit  $\varphi$  une forme hyperbolique et  $\Psi$  une forme quelconque. Alors,  $\varphi \otimes \Psi$  est hyperbolique.

**Preuve.**

On peut écrire  $\varphi = \langle 1, -1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 1, -1 \rangle$ , ce qui entraîne que

$$\varphi \otimes \Psi \cong (\Psi \oplus -\Psi) \oplus \dots \oplus (\Psi \oplus -\Psi)$$

est hyperbolique, puisque chaque terme l'est (lemme 3.4). ■

**Théorème 3.10**

Soit  $\varphi$  une forme multiplicative et  $a \in K^*$ . Alors,  $\varphi \otimes \langle 1, a \rangle$  est multiplicative.

**Preuve.**

Supposons que  $\varphi$  soit isotrope. Comme  $\varphi$  est multiplicative, cela entraîne que  $\varphi$  est hyperbolique et donc  $\varphi \otimes \langle 1, a \rangle$  est hyperbolique. Ainsi,  $\varphi \otimes \langle 1, a \rangle$  est multiplicative. Supposons maintenant que  $\varphi$  soit anisotrope et  $\varphi \otimes \langle 1, a \rangle$  isotrope. On a  $\varphi \otimes \langle 1, a \rangle = \varphi \oplus a\varphi$ . Par hypothèse, il existe  $\beta, \gamma \in D(\varphi)$  tels que  $\beta + a\gamma = 0$ . On a donc  $a = -\frac{\beta}{\gamma}$ . Comme  $\varphi$  est anisotrope et multiplicative, on a  $D(\varphi) = G(\varphi)$ . Les éléments  $\beta, \gamma$  vivent donc dans  $G(\varphi)$  et l'on a

$$\varphi \otimes \langle 1, a \rangle = \varphi \oplus a\varphi = \varphi \oplus -\frac{\beta}{\gamma}\varphi \cong \varphi \oplus -\frac{1}{\gamma}\varphi,$$

puisque  $\beta \in G(\varphi)$ . Le fait que  $\frac{1}{\gamma} \in G(\varphi)$  donne  $\frac{1}{\gamma}\varphi \cong \varphi$ , d'où

$$\varphi \otimes \langle 1, a \rangle \cong \varphi \oplus -\frac{1}{\gamma}\varphi \cong \varphi \oplus -\varphi,$$

qui est hyperbolique.

On suppose maintenant que  $\varphi$  et  $\varphi \otimes \langle 1, a \rangle$  sont anisotropes. On doit montrer que  $G(\varphi \otimes \langle 1, a \rangle) = D(\varphi \otimes \langle 1, a \rangle)$ . On considère  $\delta \in D(\varphi \otimes \langle 1, a \rangle)$ . Pour commencer, on remarque que  $\varphi \otimes \langle 1, a \rangle = \varphi \oplus a\varphi$ .

On a  $\delta = \beta + a\gamma$ , avec  $\beta, \gamma \in k$ . On déstingue plusieurs cas :

$\gamma = 0$  Dans ce cas,  $\beta \neq 0$ , ce qui entraîne  $\beta \in D(\varphi) = G(\varphi)$ . On a

$$\delta(\varphi \oplus a\varphi) = \beta(\varphi \oplus a\varphi) = \beta\varphi \oplus a\beta\varphi \cong \varphi \oplus a\varphi,$$

ce qui implique que  $\delta \in G(\varphi \oplus a\varphi)$ .

$\beta = 0$  Dans ce cas,  $\gamma \neq 0$  et donc  $\gamma \in D(\varphi) = G(\varphi)$ . On a alors  $\delta = a\gamma$  et

$$\delta(\varphi \oplus a\varphi) = a\gamma(\varphi \oplus a\varphi) = a\gamma\varphi \oplus a^2\gamma\varphi \cong a\varphi \oplus \varphi.$$

$\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ . On est dans le cas où  $\beta, \gamma \in D(\varphi) = G(\varphi)$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \delta(\varphi \oplus a\varphi) &= (\beta + a\gamma)(\varphi \oplus a\varphi) = \beta(1 + a\frac{\gamma}{\beta})(\varphi \oplus a\varphi) \\ &\cong \beta(1 + a\frac{\gamma}{\beta})(\varphi \oplus a\frac{\gamma}{\beta}\varphi) \cong \beta(1 + a\frac{\gamma}{\beta})\langle 1, a\frac{\gamma}{\beta} \rangle \otimes \varphi \\ &\cong \beta\langle 1, a\frac{\gamma}{\beta} \rangle \otimes \varphi = \langle \beta, a\gamma \rangle \otimes \varphi \\ &= \beta\varphi \otimes a\gamma\varphi \cong \varphi \oplus a\varphi. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\delta \in G(\varphi \oplus a\varphi)$ . Puisque  $\varphi$  est multiplicative,  $1 \in D(\varphi)$ . Cela entraîne que  $1 \in D(\varphi \otimes \langle 1, a \rangle)$  et donc, par le lemme 3.5,  $G(\varphi \otimes \langle 1, a \rangle) \subset D(\varphi \otimes \langle 1, a \rangle)$ .

La forme  $\varphi \otimes \langle 1, a \rangle$  est donc multiplicative. ■

### **Théorème 3.11**

Toute forme de Pfister est multiplicative.

**Preuve.**

Provient du théorème précédent et d'une récurrence. ■

### **Corollaire 3.5 (Pfister)**

Un produit de deux sommes de  $2^n$  carrés est une somme de  $2^n$  carrés.

**Preuve.**

On considère  $\varphi = \langle \underbrace{1, \dots, 1}_n \rangle = \langle \underbrace{1, \dots, 1}_{2^n} \rangle$ . On remarque que  $D(\varphi)$  contient les éléments de  $K$  qui sont représentés par  $2^n$  carrés (dans  $K$ ). Puisque la forme est multiplicative,  $D(\varphi)$  est un groupe. En effet, si  $\varphi$  est isotrope, alors elle est universelle. Si elle est anisotrope, alors  $D(\varphi) = G(\varphi)$ . ■

Le théorème suivant découle du théorème précédent.

### Théorème 3.12

Une forme de Pfister est soit anisotrope soit hyperbolique.

#### 3.5.1 Niveau d'un corps

On rappelle la définition suivante :

#### Définition 3.26 ( Niveau d'un corps)

Le niveau d'un corps  $K$ , noté  $s = s(K)$ , est le plus petit entier  $s$  tel que  $-1$  soit une somme de  $s$  carrés de  $K$ . Si  $-1$  ne s'écrit pas comme somme de carrés, on pose  $s(K) = \infty$ .

#### Théorème 3.13 (Pfister)

Le niveau d'un corps  $K$  est soit infini, soit une puissance de 2.

#### Preuve.

On suppose que  $s = s(K)$  est fini, c'est-à-dire qu'il existe des éléments  $x_1, \dots, x_s \in K^*$  tels que  $-1 = x_1^2 + \dots + x_s^2$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $2^n \leq s < 2^{n+1}$ . On définit alors la  $(n+1)$ -forme de Pfister  $\varphi = \langle \langle 1, \dots, 1 \rangle \rangle$ . Puisque  $\varphi$  est une forme de Pfister, elle est multiplicative. Comme  $s < 2^{n+1}$ , la forme  $\varphi$  est isotrope et donc hyperbolique. Ainsi, on a

$$\varphi \cong \underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_{2^n} \oplus \underbrace{\langle -1, \dots, -1 \rangle}_{2^n}.$$

Par définition de  $\varphi$ , on a

$$\varphi \cong \underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_{2^n} \oplus \underbrace{\langle 1, \dots, 1 \rangle}_{2^n}.$$

Le théorème de Witt implique que  $\langle 1, \dots, 1 \rangle \cong \langle -1, \dots, -1 \rangle$ , ce qui entraîne que  $-1 \in D(\langle 1, \dots, 1 \rangle)$  et donc que  $-1$  est une somme de  $2^n$  carrés. ■

# Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire, les théorèmes de classification des formes quadratiques sur les corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{F}_q$ . Cette classification dépend du corps de base choisie.

# Bibliographie

- [1] **F.COTTET-EMARD**, *Algèbre linéaire et bilinéaire, Cours et exercice corrigés, De boeck.*
- [2] **R.GODEMENT**, Cours d'algèbre, Hermann, 1963.
- [3] **J.GRIFONE**, Algèbre linéaire, Cépaduès-Editions, 1990.
- [4] **M.HOUIMDI**, *Algèbre bilinéaire*, Université Cadi Ayyad.
- [5] **B.KAHN**, Formes quadratique sur un corps, Société Mathématique de france, 2008.
- [6] **S.LANG**, Algèbre, Cours et exercice, Dunod.
- [7] **M.MARLE-CHARLE**, *Algèbre linéaire, Ellipses.*
- [8] **M-J.MONIER**, Algèbre, Dunod, 1996.
- [9] **D.PERRIN**, Cours d'algèbre, Ellipses, 1996.
- [10] **J.PIERRE ESCOFIER**, *Toute l'algèbre de la licence, Cours et exercice corrigés, Dunod.*